

05.05.06 / Національний гірничий університет. – Дніпропетровськ. – 2004. **11.** Ленда В.О. Вибрационные системы с комбинированным режимом динамического нагружения для энергосберегающих технологий переработки минерального сырья. Дис. д-ра. техн. наук: 05.05.06 / Институт геологической механики им. М.С. Полякова. – Днепропетровск. – 2006. **12.** Латишин Е.С. Развитие вибрационного грохочения на основе усовершенствования модельных явлений кинетики процесса. Дис. д-ра. техн. наук: 05.15.11 / Институт геологической механики им. М.С. Полякова. – Днепропетровск. – 2006. **13.** Гергеа И.И. Взаимодействие рабочей нагрузки с рабочим органом в ударно-вибрационных машинах. // Проблемы прочности. – 1995. – № 4. – С.74-82. **14.** Барчан Е.Н., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Экспериментальное исследование динамических процессов в выбивной машине с дебалансным приводом // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип.: „Машинознавство та САПР”. – 2007. – №3. – С.17-23. **15.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./ Под ред. Лавендева Э.Э. Т. 4: Вибрационные процессы и машины. – М: Машиностроение, 1981. – 510 с.

Поступила в редакцию 19.03.2009

УДК 621.01

**В.Б. ЗЕЛЕНСКИЙ**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,  
**А.А. ЗАРУБИНА**, канд. техн. наук, проф. каф. ТММиСАПР,  
**И.Я. ХРАМЦОВА**, научн. сотр. каф. ТММиСАПР,  
**З.С. САФОНОВА**, доц. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХОДЬБЫ С ПРОТЕЗОМ НА ФАЗЕ ПЕРЕНОСА

Розглянуто динамічну модель ходи на протезі, яка містить пружні елементи, що дозволяють акумулювати енергію на одних фазах руху та віддавати її на інших. Модель складено як незамкнутий кінематичний ланцюг, для якого запропонований алгоритм автоматизованої побудови рівнянь Лагранжа другого роду у матричній формі. Використання запропонованого алгоритму дозволить обрати оптимальні параметри протезу із урахуванням антропометричних вимог індивіда.

The dynamic model of ambulation on prosthetic appliance, which contains resilient elements allowing to accumulate energy at one phases of motion and give it at other phases, is considered. A model is made as kinematics chain for which the algorithm of the automated construction of Lagrangian equations of second type in matrix form is offered. The use of the offered algorithm will allow to change optimum parameters of prosthetic appliance with the account of anthropometric requirements of individual.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сначала динамическую модель ходьбы с протезом нижней конечности без упругих элементов с продольной жесткостью в бедре (т. е. при отсутствии в кинематической схеме кинематических пар поступательного типа). Динамическая модель ходьбы с протезом нижней конечности при учете движений отдельных частей тела человека (стопы, голени, бедра, корпуса) на фазе переноса структурно соответствует модели манипулятора, представленного открытой (незамкнутой) кинематической цепью звеньев (см. рис. 1). Шарниры  $O_3$  и  $O_4$  соединяют различные пары звеньев и показаны на рис. 1 раздельно; на самом деле они совпадают, так как рассматривается плоская модель.

Динамический анализ такой цепи с большим количеством звеньев ( $n=7$ ) отличается значительной сложностью и громоздкостью уравнений движения. Поэтому здесь целесообразно использовать методы автоматизированного построения уравнений динамики на ЭВМ. В частности, достаточно удобным является составление уравнений Лагранжа II рода в матричной форме.

Пусть  $R_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$  – вектор, определяющий положение произвольной точки звена  $i$  в системе отсчета, жестко связанной с этим звеном. Так как нами рассматривается плоская задача, то  $R_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$ . Если матрица перехода от системы координат  $(i-1)$ -го звена к системе  $i$ -го звена есть  $A_i (3 \times 3)$ , то можно связать радиусы и векторы одной и той же точки в системах  $i$  и  $i-1$ :

$$R_{i-1} = A_i R_i. \quad (1)$$

Матрицы перехода  $A_i$  для звеньев 1, 2, ..., 5 и 7 имеют одинаковый вид (2). Строение матрицы звена 6 будет показано ниже.

Пусть  $a_i$  – длина  $i$ -го звена (расстояние между шарнирами);  $x_i^*, y_i^*$  – координаты центра тяжести  $i$ -го звена в собственной системе координат;  $m_i$  – масса звена;  $I_{xx}^{(i)}, I_{xy}^{(i)}, I_{yx}^{(i)}, I_{yy}^{(i)}$  – элементы тензора инерции, вычисляемые для  $i$ -го звена относительно собственных осей.

Матрица перехода  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5; 7$ ) имеет вид:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i & a_i \sin q_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Введем матрицы преобразования

$$T_{il} = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_l; \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad l = 0, 1, \dots, 7; \quad i < l. \quad (3)$$

Отдельно обозначим

$$T_{0n} = T. \quad (4)$$

Матрицей инерции называется матрица

$$H_i = \begin{bmatrix} I_{xx}^{(1)} & I_{xy}^{(1)} & m_i x_i^* \\ I_{yx}^{(1)} & I_{yy}^{(1)} & m_i y_i^* \\ m_i x_i^* & m_i y_i^* & m_i \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим величины  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ .

$$\mathcal{R}_{0i} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathcal{R}_{0i}}{\partial q_k} \mathcal{Q}_k, \quad (6)$$

где

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{0i}}{\partial q_k} = A_1 A_2 \dots A_{k-1} \frac{\partial A_k}{\partial q_k} A_{k+1} \dots A_i, \quad k \leq i. \quad (7)$$

Известно [1], что для цепи с вращательными парами

$$\frac{\partial A_k}{\partial q_k} = \Omega_k A_k, \quad (8)$$

где  $\Omega_k$  – матрица вида

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда вместо (7) получаем

$$\frac{\partial T_{0i}}{\partial q_k} = A_1 A_2 \dots A_{k-1} \Omega_k A_k A_{k+1} \dots A_i \quad (10)$$

или с учетом (3)

$$\frac{\partial T_{0i}}{\partial q_k} = T_{0k-1} \Omega_k \dots T_{k-i}, \quad (11)$$

обозначим

$$u_{ik} = T_{0k-1} \Omega_k \dots T_{k-i}. \quad (12)$$

Можно теперь записать

$$\frac{\partial T_{0i}}{\partial q_k} = \begin{cases} u_{ik} & k \leq i \\ 0 & k > i \end{cases}. \quad (13)$$

Далее

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{0i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^i u_{ik} \mathcal{Q}_k = \sum_{k=1}^i \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_j} \mathcal{Q}_k. \quad (14)$$

Обозначим

$$u_{ikj} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_j} \quad \text{для } k \leq i, \quad (15)$$

причем

$$u_{ikj} = \begin{cases} u_{k-1j} \Omega_k T_{k-i} & \text{для } j \leq k-1; \\ T_{0k-1} \Omega_k \Omega_k T_{k-i} & \text{для } j = k; \\ T_{0k-1} \Omega_k T_{k-1j-1} \Omega_j T_{j-i} & \text{для } k < j \leq i; \\ 0 & \text{для } j > i. \end{cases} \quad (16)$$

Потенциальная энергия  $i$ -го звена в поле сил тяжести:

$$\Pi_i = P_i y_0^*, \quad (17)$$

где  $P_i$  – сила тяжести звена  $i$ ;  $y_0^*$  – координата центра тяжести звена  $I$  в системе отсчета  $x_0 y_0$ , связанной с основанием. В матричной записи

$$\Pi_i = m_i G^T T_{0i} R_i^*, \quad (18)$$

где  $R_i^*$  – матрица-столбец (вектор), первые два элемента которой есть декартовы координаты центра тяжести звена  $i$  в соответственной системе отсчета, связанной со звеном  $i$ , то есть

$$R_i^* = [x_i^*, y_i^*, 1]^T, \quad (19)$$

$$G^T = [0, -g, 0], \quad (20)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Суммарная потенциальная энергия системы

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i = - \sum_{i=1}^n m_i G^T T_{0i} R_i^*. \quad (21)$$

Обобщенную силу  $Q_j$  представим состоящей из трех слагаемых:

1) активного момента  $M_j$  (вектор  $\dot{M}_j$  приложен к  $j$ -звену, записан в системе  $j$  и проходит через начало координат этой системы);

2) упругого момента в сочленениях

$$M_j^y = -C_{j-1j} q_j + C_{jj+1} q_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (22)$$

где  $C_{j-1j}$  – жесткость на поворот в сочленении  $j-1, j$ ; в частности  $C_{j-1j}$  может быть нулем, так в соответствии с рис. 1 отличными от нуля являются жесткости  $C_{45}, C_{56}, C_{67}$ ;

3) потенциального момента сил тяжести

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i G^T \frac{\partial T_{0i}}{\partial q_j} R_i^* = \sum_{i=1}^n m_i G^T u_{ij} R_i^*, \quad (23)$$

$$Q_j = M_j - C_{j-1j} q_j + C_{jj+1} q_{j+1} + \sum_{i=1}^n m_i G^T u_{ij} R_i^*. \quad (24)$$

Теперь уравнения Лагранжа II рода в матричной форме записываются в виде:

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i t_r (u_{ij} H_i u_{ik}^T) \mathcal{Q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i t_r (u_{ij} H_i u_{ik}^T) \mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_l - \sum_{i=j}^n m_i G^T u_{ij} R_i^* + C_{j-1j} q_j - C_{jj+1} q_{j+1} = M_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Рассмотрим модель с учетом передаточных функций в коленном сочленении протеза. Представим звенья 5 и 6 в виде двух стержней, составляющих вращательную пару и имеющих переменные длины  $a_5^*$  и  $a_6^*$ . Длина каждого из этих звеньев состоит из суммы, включающей постоянный и переменный члены, второй из которых зависит от механизма сочленения и является функцией угла  $q_6$  между осями звеньев 5 и 6:

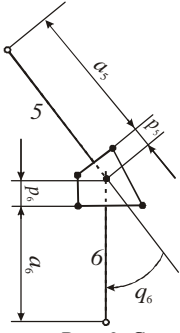


Рис. 2. Схема коленного сочленения в виде шарнирного четырехзвенника

$$\begin{aligned} a_5^* &= a_5 + p_5, & a_6^* &= a_6 + p_6, \\ p_5 &= p_5(q_6), & p_6 &= p_6(q_6). \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, при таком представлении в левые части уравнений Лагранжа следует добавить дополнительные члены, связанные с учетом функций  $p_5(q_6)$ ,  $p_6(q_6)$ .

Будем снабжать индексом «\*» обозначения матриц перехода и матриц преобразования, включающих в свою конструкцию члены с  $p_5$  и  $p_6$ . Имеем

$$A_5^* = A_5 + p_5 A_{p_5}, \quad A_6^* = A_6 + p_6 A_{p_6}, \quad (27)$$

где

$$A_{p_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos q_5 \\ 0 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } A_{p_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos q_6 \\ 0 & 0 & \sin q_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Отметим, что

$$A_{p_5} A_{p_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos q_5 \\ 0 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos q_5 \\ 0 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (29)$$

С целью унификации формул (11)-(13), (16) для величин  $u_{ik}$ ,  $u_{kj}$  запишем для  $i < 6$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{0i}}{\partial q_6} &= A_1 \dots A_4 \frac{\partial A_5}{\partial q_6} A_6 \dots A_i + A_1 \dots A_4 A_5 \frac{\partial A_6}{\partial q_6} A_7 = \\ &= A_1 \dots A_4 \frac{\partial p_5}{\partial q_6} A_{p_5} A_6 \dots A_i + A_1 \dots A_4 A_5 \frac{\partial p_6}{\partial q_6} A_{p_6} A_7 \dots A_i + \dots A_1 \dots A_5 \Omega_6 A_6 \dots A_i = \\ &= A_1 A_2 \dots A_5 \left\{ A_5^{-1} A_{p_5} \frac{\partial p_5}{\partial q_6} + A_{p_6} A_6^{-1} \frac{\partial p_6}{\partial q_6} + \Omega_6 \right\} A_6 A_7 \dots A_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $\Omega_6$  определяется выражением (9). Если для элемента с номером 6 обозначить теперь

$$\Omega_6 = A_5^{-1} A_{p_5} \frac{\partial p_5}{\partial q_6} + A_{p_6} A_6^{-1} \frac{\partial p_6}{\partial q_6} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

то, очевидно, формулы (11)-(13) справедливы для всех элементов системы.

Далее, так как теперь  $\Omega_6 = \Omega_6(q_6)$ , то вместо (16) следует записать

$$u_{ikj} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} T_{0k-1} \Omega_k T_{k-li} = \begin{cases} u_{k-1j} \Omega_k T_{k-li} & j \leq k-1; \\ T_{0k-1} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_j} T_{k-li} + T_{0k-1} \Omega_k \Omega_k T_{k-li} & j = k; \\ T_{0k-1} \Omega_k T_{k-1j-1} \Omega_j T_{j-li} & k < j \leq i; \\ 0 & j > i. \end{cases} \quad (32)$$

Причем, если  $k \neq 6$ , то  $\frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} = 0$  и выражения (32) совпадают с (16), а

при  $k = 6$  следует учитывать член  $T_{0k-1} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} T_{k-li}$ , в котором с учетом (31)

$$\frac{\partial \Omega_6}{\partial q_6} = A_5^{-1} A_{p_5} \frac{\partial^2 p_5}{\partial q_6^2} + A_{p_6} A_6^{-1} \frac{\partial^2 p_6}{\partial q_6^2}. \quad (33)$$

Наконец, при получении коэффициентов Лагранжа (25) следует учитывать, что в рассматриваемом случае матрицы инерции (5) для звеньев 5 и 6 будут переменными, так как координаты  $x_5^*$  и  $x_6^*$  центров тяжести звеньев 5 и 6 являются переменными

$$x_5^* = x_5^*(p_5(q_6)) \text{ и } x_6^* = x_6^*(p_6(q_6)). \quad (34)$$

Указанное обстоятельство приводит к тому, что матрица инерции (5) будет, вообще говоря, зависеть от времени и из-за усложнения матричных выражений для кинетической энергии появятся в уравнениях Лагранжа II рода дополнительные члены достаточно сложной структуры. Поэтому в силу того, что

$$p_5 \ll a_5, \quad p_6 \ll a_6, \quad (35)$$

будем пренебрегать их влиянием на выражения для матрицы инерции.

**Включение поступательных звеньев.** Применение упругих элементов в протезе нижней конечности приводит к необходимости включения в модель протеза поступательных звеньев в голень и бедро протеза. Рассмотрим в общем виде локальную систему отсчета поступательного звена и соответствующую матрицу перехода.

Ось  $x_i$  поступательного звена  $i$  (рис. 3) направлена по оси звена. Обобщенная координата  $q_i$  определяет положение звена относительно предыдущего  $(i-1)$ -го звена. Матрица перехода определяется как матрица переноса осей  $(i-1)$ -го звена вдоль оси  $O_i x_i$  на величину  $a_i + q_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_i + q_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Представим последнюю матрицу в виде произведения

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i^{-1} A_i.$$

Так как

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что проверяется непосредственным вычислением, то

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i^{-1} A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A_i.$$

Тогда по типу выражения (8) для поступательного звена

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = \Omega_i A_i, \quad (38)$$

где

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Такое представление производной  $\frac{\partial A_i}{\partial q_i}$  матрицы перехода поступатель-

ного звена позволяет использовать представленные выше формулы для уравнений Лагранжа II рода при наличии в цепи звеньев не только с вращательными, но и с поступательными парами.

**Обобщенная сила для поступательного звена.** Для обобщенной силы поступательного звена в выражении (24) вместо активного момента  $M_j$  следует принять 0, так как активные силы, действующие на звено, отсутствуют. В этом случае

$$M_j = -C_{j-1j} q_j + \sum_{i=j}^n m_i G^T u_{ij} R_i^*, \quad (40)$$

где  $C_{j-1j}$  – жесткость на линейное перемещение в сочленении  $j-1, j$ .

**Заключение.** Теперь можно скорректировать рассмотренную выше динамическую модель путем добавления поступательных звеньев. Разобьем бедро и голень протеза на два звена, связанных кинематической парой поступательного типа с добавлением упругого элемента с продольной жесткостью,

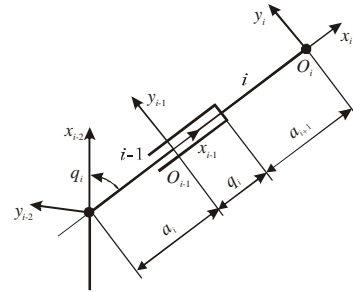


Рис. 3. Поступательное звено

ось которого направлена по оси бедра (голени). Кроме того, с целью учета компенсаторного подъема „шарнира” бедра, осуществляемого инвалидом при переносе протеза, можно ввести в схему дополнительное поступательное звено между корпусом и шарниром бедра протеза.

**Список литературы:** 1. М. Вукобратович. Шагающие роботы и антропоморфные системы. – М.: Мир. – 1976. 2. Г. В. Корнев. Введение в механику человека. – М.: Наука, 1977.

Поступила в редколлегию 02.04.2009

УДК 621.01

**О.І. ЗІНЧЕНКО**, канд. техн. наук, каф ТММіСАПР НТУ „ХПІ”

### КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ ВИСОКОГО КЛАСУ З ВИКОРИСТАННЯМ БІБЛІОТЕКИ ПІДПРОГРАМ АНАЛІЗУ ГРУП ДРУГОГО КЛАСУ

У статті викладено методику кінематичного аналізу механізму четвертого класу з використанням програмного забезпечення для груп другого класу, розробленого на кафедрі ТММіСАПР. Показана можливість розбиття механізму високого класу на прості групи, для яких відомі алгоритми аналізу.

In the article method of kinematical analysis of fourth class mechanism are accounted. For second class groups the computer programs are used. A possibility divide of mechanism of high class in simple groups are demonstrated.

**Вступ.** Запропоновано стратегію кінематичного дослідження механізмів четвертого класу, яка представляє собою розбиття механізму на групи та знаходження кінематичних параметрів цих груп з подальшим використанням методу ітерацій. Цей підхід до розв’язання цієї складної задачі здається простим і наглядним і дає змогу за дуже короткий час вирішити питання аналізу. У статті детально описується бібліотека підпрограм і принцип користування ними, що дає змогу любому проектувальнику, зокрема студенту, скористатися ними для рішення подібної задачі.

**Актуальність.** Питання аналізу будь-яких механізмів завжди були і залишаються бути актуальними. Питання лише в тому, щоб знайти найбільш просту методику, яка при своїй простоті здатна вирішити всі необхідні питання і мати достатню точність і швидкість розв’язання. Пропонується така методика, яка базується на використанні формул для аналізу структурних груп другого класу.

**Алгоритм розв’язання задачі аналізу шляхом розбиття на групи.** Метою кінематичного дослідження є визначення положень ланок, їх швидкостей та прискорень або швидкостей та прискорень точок механізму. Досліджуваний механізм зображений на рис. 1. На рис. 1 ланки мають наступні назви: 1 – кривошип (корба) –  $OA$ , 2 – шатун –  $ADC$ , 3 – шатун –  $CB$ , 4 – шатун –  $ED$ , 5 – коромисло –  $EFB$ . Механізм складається із початкової ланки 1 і однієї структурної групи четвертого класу другого порядку. Клас механізму – чет-